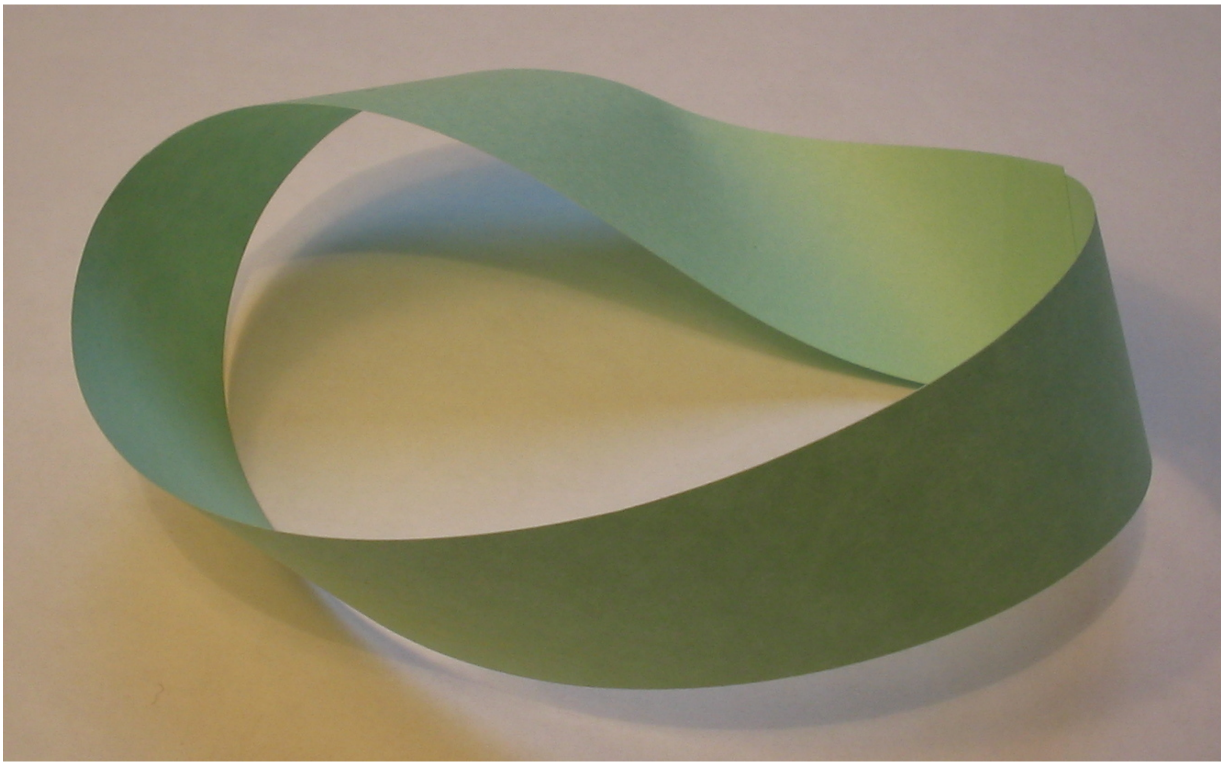
Topologie II



Skriptum zur Vorlesung von Prof. Dr. D. van Straten, gehalten in Mainz,
SS 2018

Vorlesung vom 19.04.2018, $\LaTeX$von Peter Lang

1. Homologie und Raumpaare

Definition (1.1)
Ein Raumpaar ist ein Paar (X, A) zusammen mit einem Morphismus $i : A \to X$.
Daraus definiert man die relativen Homologiegruppen.
$H_k(X, A)$ mit $k = 0, 1, 2...$

Bemerkung
Dies ist funktoriell, d.h. $f : (X, A) \to (Y, B) \rightsquigarrow f_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B); \forall k = 0, 1, 2...$
Elemente von $H_k(X, A)$ werden durch rel k-Zykel repräsentiert, d.h. eine k-Kette mit Rand in A.
Nützlich bei Vergleich von Homologien $H_k(X)$ und $H_k(A)$.

Definition (1.2)
(X, A) Raumpaar und $i : A \to X$.
$i_. : S_.(A) \to S_.(X)$ die zugehörige Abbildung der singulären Kettenkomplexe.
Definiere den relativen singulären Kettenkomplex wie folgt:
$S_.(X, A) \overset{def}{=} \frac{S_.(X)}{S_.(A)}$, d.h. bilde für jedes $k = 0, 1, 2...$ die Faktorgruppe.

Wir erhalten dann eine Abbildung: $\delta_k : S_k(X, A) \to S_{k-1}(X, A)$ induziert von den Differentialen.
$\rightsquigarrow (S_.(X, A), \delta_.)$ Komplex der relativen k-Ketten.
Definiere weiter die Homologie dieses Komplexes: $H_k(X, A) \overset{def}{=} H_k(S_.(X, A), \delta_.)$
Man erhält folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & S_k(A) & \longrightarrow & S_{k-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & S_k(X) & \longrightarrow & S_{k-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & S_k(X, A) & \longrightarrow & S_{k-1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Das heißt $0 \to S_.(A) \to S_.(X) \to S_.(X, A) \to 0$ ist eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen.

Wir wollen eine Abbildung: $H_1(X)xH_1(X) \to \mathbb{Z}$. Dazu betrachte n-dimensionale Mannigfaltigkeit X: $H_{n-k}(X)xH_{n-l}(X) \to H_{n-k-l}(X)$, wobei $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta = (-1)^{kl}\beta\alpha$

Bemerkung (1.3)
Dualität:

$H_1(X) \times H_1(X) \to \mathbb{Z}$

$H_1(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z}) = H_1(X)^*$

$H_{n-k}(X) \times H_k(X) \to \mathbb{Z}$

Wir haben Isomorphismus $H_{n-k}(X) \cong H_k(X)^*$ nach dem Dualitätsprinzip.

Wir werden später für Kohomologie das Cup-Produkt definieren, welches eine Erweiterung des Dualitätsprinzip darstellt und die Kohomologie zu einem graduierten, kommutativen Ring macht. $H*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(X)$

Theorem (Poincare-Dualität 1.4)
X kompakte, orietierte Mfk. $\exists P : H^k(X) \to H_{n-k}(X)$ mit P Isomorphismus.

Theorem (1.5)
Sei $0 \to A_. \to B_. \to C_. \to 0$ ein kurze exakte Sequenz von Komplexen.
So erhält man eine lange exakte Sequenz in der Homologie:
$... \to H_k(A) \to H_k(B) \to H_k(C) \to H_{k-1}(A) \to ...$

Beweis
Der Beweis funktioniert über Diagrammjagd. Hierbei betrachten wir uns folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & A_k & \longrightarrow & A_{k-1} & \longrightarrow & A_{k-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & B_{k-1} & \longrightarrow & B_{k-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_{k-1} & \longrightarrow & C_{k-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Wir wählen ein $c \in ker(C_k \to C_{k-1})$, dann existiert ein $b \in B_k$, weil die Abbildung surjektiv ist nach Voraussetzung. Dieses c wird auf ein $b' \in B_{k-1}$ geschickt. Weiter gilt für das Bild von b', dass es 0 ist in B_{k-2} aufgrund der Exaktheit der Sequenz. Daher existiert nun ein Zykel $a \in A_{k-1}$. Insgesamt also eine Abbildung $\gamma : C_k \to A_{k-1}$ mit $c \mapsto a$. Dies induziert eine wohldefinierte Abbildung $\delta : H_k(C) \to H_{k-1}(A)$.
Diese Abbildung wird auch Verbindungshomomorphismus genannt.

Bemerkung (1.6)
Ein bekannter Spezialfall ist folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & ker(\alpha) & \longrightarrow & A_k & \longrightarrow & A_{k-1} & \longrightarrow & coker(\alpha) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & ker(\beta) & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & B_{k-1} & \longrightarrow & coker(\beta) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & ker(\gamma) & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_{k-1} & \longrightarrow & coker(\gamma) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Aus diesem erhalten wir dann die exakte Sequenz:
$0 \to ker(\alpha) \to ker(\beta) \to ker(\gamma) \to coker(\alpha) \to coker(\beta) \to coker(\gamma) \to 0.$

Anwendung
LEHS für Raumpaare:
$... \to H_k(A) \to H_k(X) \to H_k(X,A) \to H_{k-1}(A) \to ...$
$\rightsquigarrow H_k(X,A) = 0 \quad \forall\, k \Leftrightarrow H_k(A) \to H_k(X) \quad \forall\, k$

Theorem
Ausschneidung[1.7] Sei (X,A) Raumpaar, $U \subset A$ und $\overline{U} \subset A^\circ$. Dann induziert die Abbildung $j : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ einen Isomorphismus der relativen Homologiegruppen $j_* : H_k(X \setminus U, A \setminus U) \to H_k(X,A)$

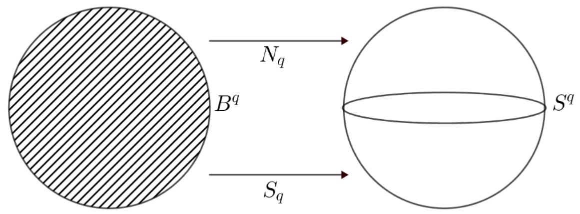
Beispiel Sei $(B, \delta B)$ der n-Ball und sein Rand als Raumpaar.
$... \to H_k(\delta B) \to H_k(B) \to H_k(B, \delta B) \to H_{k-1}(\delta B) \to ...$
Wir kennen bereits die Homologiegruppen von B und δB
$H_k(B) = 0 \quad \forall k > 0$ Daraus erhalten wir dann: $H_k(B, \delta B) \cong H_{k-1}(\delta B) \quad k > 1$
Und somit haben wir fÃ$\frac{1}{4}$r die Homologiegruppen von dem Raumpaar folgendes:
$H_n(B, \delta B) = \mathbb{Z}$ und $H_k(B, \delta B) = 0$ sonst.

Vorlesung vom 09.05.2018, LaTeXvon Marina Schmidt

- Betrachte die Homologie von dem CW-Raum $\mathbb{P} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$S^0 \hookrightarrow S^1 \hookrightarrow ... \hookrightarrow S^q \hookrightarrow ... \hookrightarrow S^n$$

Definiere $C_q := H_q(S^q, S^{q-1}) = \mathbb{Z}_{n_q} \bigoplus \mathbb{Z}_{s_q}$ mit $\delta : C_{q+1} \longrightarrow C_q$
Homologie von Paaren



$$0 \longrightarrow H_q(S^q) \xrightarrow{\alpha} \underbrace{H_q(S^q, S^{q-1})}_{=C_q} \longrightarrow H_{q-1}(S^{q-1}) \longrightarrow 0, \ \ \mathrm{Im}(\alpha) = \mathbb{Z}(n_q - s_q),$$

Daraus folgt, dass $Im(\alpha) = \mathbb{Z}(n_q - s_q)$, und man bekommt:

$$H_{q+1}(S^{q+1}, S^q) \underset{\delta_{n_{q+1}}=\delta_{s_{q+1}}=\pm(n_q-s_q)}{\longrightarrow} H_q(S^q) \longrightarrow H_q(S^q, S^{q-1})$$

1 Homologie mit Koeffizienten

1.1 Motivierendes Beispiel

Betrachte die Oberfläche der Erde. Sie ist homotop zur S^2, mit $W : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
$v \longmapsto (t(v), p(v))$ stetig. Dabei bezeichnet $t(v)$ die Temperatur und $p(v)$ den Luftdruck.
'Es gibt antipodale Punkte, an denen das Wetter gleich ist.'
Angenommen, dies wäre falsch, dann gilt: $w(v) \neq w(-v)$. Daraus folgt, dass
$\varphi : S^2 \longrightarrow S^1, v \longmapsto \frac{w(v)-w(-v)}{\|w(v)-w(-v)\|}$ stetig ist. Also gilt $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Satz *(Borak-Ulam)*
Wenn $n > m$ ist, dann gibt es keine stetige Abbildung $\varphi : S^n \longrightarrow S^m$ mit $\varphi(-v) = -\varphi(v) \ \forall \ v \in S^n$.

Beweis
(Für m=1 und m=0 ist es trivial)
Angenommen, es existiert eine Abbildung $\varphi : S^n \longrightarrow S^1$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{P}^n \arrow[r, "\exists\psi"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi(\mathbb{P}^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi(\mathbb{P}^1) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & S^1 \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{P}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

mit $\lambda : \mathbb{P}^n \longrightarrow S^1$.
Für $a \in S^n$, $\phi(a) \in S^1$ gilt: $\lambda(p(a)) = \varphi(a),\ \varphi(a) = \lambda(p(-a))$. Also ist $\varphi(a) = \lambda(p(-a)) = \lambda(p(a)) = \varphi(a)$. Dies ist ein Widerspruch.
Der Beweis funktioniert nicht so, wenn $\mathbb{P}^1$ durch $\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, ersetzt wird. $\square$

1.2 $H_\bullet(X, G)$

Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe (z.B. $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, ...$).
Singuläre k-Kette in X mit Koeffizienten in G:
Element von $S_n(X, G)$: $\sum\limits_{\text{endlich}} n_i\sigma_i,\ \sigma_i : \Delta_k \longrightarrow X, n_i \in G$ (vorher hatten wir $n_i \in \mathbb{Z}$)
Anders gesagt: $S_k(X, G) = G \otimes_{\mathbb{Z}} S_n(X)$, z.B. $S_k(X) = S_k(X, \mathbb{Z})$. Dies induziert eine Randabbildung $1 \otimes \delta_k : S_k(X, G) \longrightarrow S_{k-1}(X, G), \Sigma n_i\sigma_i \longmapsto \Sigma n_i\delta_k\sigma_i$.

Beispiel $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $1 = -1, 2 = 0$
$S_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: Koeffizienten $0, 1$, man kann alle Vorzeichen vergessen
Ketten-Komplex $(S_\bullet(X, G), 1 \otimes \delta_\bullet)$

Definition $H_k(X, G) := H_k(S_\bullet(X, G), 1 \otimes \delta)$ Homologie mit Koeffizienten in G

Eigenschaften von $H_\bullet(X, G)$:

0) $H_\bullet(X, \mathbb{Z}) = H_\bullet(X)$
1) $H_k(-, G) : X \longmapsto H_k(X, G)$ ist ein Funktor $Top - Ab$;
   $(X \xrightarrow{\text{f}} Y) \longmapsto f_* : H_k(X, G) \longrightarrow H_k(Y, G)$
2) Wenn $f, g : X \longrightarrow Y$ homotopieäquivalent ($f \simeq g, X \times I \xrightarrow{\text{H}})Y,\ H(-, 0) = f$, $H(-, 1) = g$), dann $f_* = g_* : H_k(X, G) \longrightarrow H_k(Y, G)$
3) Mayer-Vietoris gilt wie vorher, relative Gruppe $H_k(X, A; G)$
4)
$$H_i(pt, G) = \begin{cases} G & i = 0, \\ 0 & i > 0. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass:

1)
$$H_k(S^n, G) = \begin{cases} G & k = 0, n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$H_{k+1}(B^{n+1}, \delta B^{n+1}; G) \simeq H_k(S^n, G)$,

$$H_k(B^n, \delta B^n; G)) = \begin{cases} G & k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2) CW-Komplex: $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(2)} \subset ... \subset X$. Zellulärer Ketten-Komplex $C_\bullet(X) = H_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)})$, $C_\bullet(X, G) = H_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)}; G) = G \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet(X)$
Dann: $H_k(X; G) \simeq H_k(C_\bullet(X, G), d_\bullet)$

Wir betrachten wieder $\mathbb{P}^n$!

$$C_\bullet(\mathbb{P}^n) : [\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \ ... \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}]$$

In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt $2 = 0$. Außerdem ist: $\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^1 \subset ... \subset \mathbb{P}^n$.

$$C_\bullet(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) : [\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \ ... \ \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$$

Dann gilt: $H_k(X; G) \simeq H_k(C_\bullet(X, G), d_\bullet)$.

$$\Rightarrow H_k(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ für } k = 0, 1, 2, ..., n$$

NB: $H_2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = 0, H_2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$

1.3 Anwendung

Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{P}^2 \longrightarrow S^2$.
$\gamma : \mathbb{P}^2 \longrightarrow S^2, p \longmapsto \gamma(p) = c$ konstante Abbildung, $P^2 \supset P^1 \supset P^0$,
$\rho : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2/\mathbb{P}^1 \cong S^2$.
Sind γ und ρ homotop zueinander?
Betrachte die induzierte in Homologie: $\rho_* : \underset{=0}{H_2(\mathbb{P})} \longrightarrow \underset{=\mathbb{Z}}{H_2(S^2)}$

$$H_1(\mathbb{P}^2) \longrightarrow H_1(S^2),\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longmapsto 0$$

$$\underset{=\mathbb{Z}}{H_0(\mathbb{P}^2)} \xrightarrow{\sim} \underset{=\mathbb{Z}}{H_0(S^2)} \quad \gamma_* = \rho_*$$

Jetzt sehen wir uns folgendes an: $H_*(-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$!

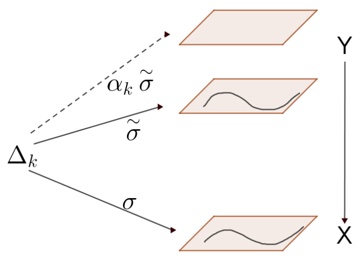
$$\begin{aligned}
&\rho_* : H_2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
&H_1(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(S^2), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\ H_0(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
&\rho_* : H_2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(S^2), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
&\gamma_* :: H_2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(S^2)
\end{aligned}$$

Da $\rho_* \neq \gamma_*$ ist, gilt: $\rho \underset{\text{htp}}{\simeq} \gamma$.

1.4 Smith-Theorie

Betrachte die Abbildung $p : Y \xrightarrow{2:1} X$, d.h. $S^n \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^n$.
$G(Y/X) = \langle \alpha \rangle$ zyklisch von Ordnung 2 mit $\alpha : Y \longrightarrow Y$.

$$\begin{aligned}
&tr : S_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_k(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), (\sigma : \Delta_k \longrightarrow X) \longmapsto (\widetilde{\sigma} + \alpha\widetilde{\sigma}) \\
&p_* : S_k(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \widetilde{\sigma} \longmapsto p \cdot \widetilde{\sigma}
\end{aligned}$$



$$0 \longrightarrow S_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_k(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

ist eine exakte Sequenz.
$\rightsquigarrow$ kurze exakte Sequenz von Komplexen:

$$0 \longrightarrow S_\bullet(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_\bullet(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_\bullet(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

lange exakte Sequenz in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Homologie

$$... \longrightarrow H_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow ...$$

$$S_\bullet(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_\bullet(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow S_\bullet(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

exakte Sequenz von Komplexen mit

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "p"] \\
\Delta_P \arrow[ur, "\widetilde{\sigma}"] \arrow[r, "\sigma"] & X
\end{tikzcd}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&... \longrightarrow H_{n+1}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{tr_*} H_n(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_n^*} H_n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_n} \\
&... \longrightarrow H_{n-1}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow ...
\end{aligned}
$$

Vorlesung vom 23.05.2018, $\LaTeX$von Katharina Hansmann

1. - p-Formen:

     $\Omega^p(X) \ni \omega = \sum_{|I|=p} a_I * d_{x_I}$ wobei $I = (i_1, ..., i_p)$ mit
     $i_1 < i_2 < ... < i_p$, $a_I = a_{i_1 ... i_p}$, $d_{x_I} = d_{x_{i_1}} \wedge ... \wedge d_{x_{i_p}}$, $a_I := a_I(x)$
     wobei $x \in X$ reellwertige C^∞-Mannigfaltigkeit

   - Äußere Ableitung:

     $\Omega^p(X) \xrightarrow{\delta} \Omega^{p+1}(X)$
     $\omega \mapsto d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_i} d_{x_i} \wedge d_{x_I}$
     wobei $d_{x_i} \wedge d_{x_j} = -d_{x_j} \wedge d_{x_i}$; $\delta \circ \delta = 0$

   - de Rham-Komplex:

     $\Omega(X) = (\Omega(X), \delta)$:
     $[\Omega^0(X) \xrightarrow{\delta} \Omega^1(X) \xrightarrow{\delta} ... \xrightarrow{\delta} \Omega^n(X)]$

   - de Rham-Kohomologie:

     $H^p_{dR}(X) = \frac{\{geschlossene\ p-Formen\}}{\{exakte\ p-Fprmen\}} = \frac{ker(\delta:\Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X))}{im(\delta:\Omega^{p-1}(X) \to \Omega^p(X))}$

2. Funktionalität:
   (pull-back Methode)

   Sei $f : X \to Y$ eine C^∞-Abbildung
   $\mathbb{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto (y_1(x, ..., y_m(x)) \in \mathbb{R}^m$,dann:
   $f^\star : \Omega^p(Y) \to \Omega^p(X)$
   $\omega \mapsto f^\star\omega$

   Beispiel :
   p=0: $(\varphi : Y \to \mathbb{R}) \mapsto (\varphi \circ f : X \to \mathbb{R})$
   p=1: $\omega = \sum_{i=1}^m a_i(y) d_{y_i} \mapsto \sum_{i=1}^m a_i(y(x)) d_{y_i}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i(y(x)) \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} d_{x_j}$..

   erhalte Cokettenabbildung:

   $$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(Y) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^1(Y) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^2(Y) & \xrightarrow{\delta} & ... \\ \downarrow f^\star & & \downarrow f^\star & & \downarrow f^\star & & \\ \Omega^0(X) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^1(X) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^2(X) & \xrightarrow{\delta} & ... \end{array}$$

   $\rightsquigarrow f^\star : H_d R^p(Y) \to H_d R^p(X)$

3. Integration von p-Formen Ã¼ber p-Ketten:

   Sei $\sigma : \Delta^p \to X$ ein p-Simplex in X aus C^∞, $\omega \in \Omega^p(X)$ dann ist
   $< \gamma, \omega > := \sum_{i=1}^N n_i < \sigma_i, \omega > =: \int_\gamma \omega$ p-Kette, mit $\gamma = \sum_{i=1}^N n_i \sigma_i$,
   $< \sigma, \omega > := \int_\Delta \sigma^\star \omega = \int_\sigma \omega,\ \int_\Delta \sigma^\star \omega$ Integral von ω Ã¼ber σ

4. **Satz** *Satz von Stokes:*

   Sei Γ *eine p-Kette,* ω *eine (p-1)-Form, dann gilt:*
   $\int_\Gamma d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$
   ist $d\omega = 0$, *so ist* $\int_{\partial\Gamma} \omega = 0$

   Beispiel :
   $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\},\ \omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$
   dann ist $d\omega = 0$, aber andererseits $\int_\gamma \omega = 2\pi \neq 0$ mit $\gamma : [0, 2\pi] \to X$,
   $\varphi \mapsto (cos(\varphi), sin(\varphi))$
   Also ist γ kein Rand bzw. $\nexists \Gamma$ mit $\partial\Gamma = \gamma$
   $\rightsquigarrow H_1(X) \neq 0,\ [\gamma] \neq 0,\ H^1_{dR}(X) \neq 0$ und $[\omega] \neq 0(\star)$
   Angenommen: $\omega = d\eta$, dann $\int_\gamma \omega = \int_\gamma d\eta = \int_{\partial\gamma} \eta = 0$, es gilt allerdings $[\omega] \neq 0(\star)$

   Eine weitere Interpretation von Stokes:

   Satz *Satz von dem Rand:*

   $\exists$ *natürliche Abbildung* $\alpha :\ H^p_{dR}(X) \to Hom_{\mathbb{Z}}(H_p(X), \mathbb{R})$,
   $[\omega] \mapsto ([\Gamma] \mapsto < \Gamma, \omega > = \int_\Gamma \omega)$, *wobei* $[\Gamma] \subset H_p(X)$ *und* $< \Gamma, \omega > \in \mathbb{R}$

5. Weitere Struktur auf $H_{dR}(X)$:

   Wir definieren das sogenannte „Wedge-Produkt“oder auch „Dach-Produkt“genannt:

   Definition :
   $\wedge : \Omega^p(X) \times \Omega^q(X) \to \Omega^{p+q}(X)$
   $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$
   $(dx_I, dx_J) \mapsto dx_I \wedge dx_J = dx_K$, wobei $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

   Eigenschaften:

   - $\wedge$ ist bilinear: $(\omega + \omega^\star) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \omega^\star \wedge \eta$
   - $\wedge$ ist assoziativ: $(\omega \wedge \eta) \wedge \lambda = \omega \wedge (\eta \wedge \lambda)$
   - $\wedge$ graduiert kommutativ: $\omega \in \Omega^p(X),\ \eta \in \Omega^q(X) \Rightarrow \omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$

- Leibniz Regel: $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$

Folgerung :
$d\omega = 0,\ d\eta = 0 \Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = 0$
ist $d\omega = 0$, so ist $\omega \wedge d\lambda = \pm d(\omega \wedge \lambda)\ \forall \lambda$ exakt
$\Rightarrow [\omega \wedge \eta]$ hängt nur von $[\omega], [\eta]$ in $H_{dR}(X)$ ab,
d.h. wenn $\eta^\star = \eta + d\gamma \Rightarrow \omega \wedge \eta^\star = \omega \wedge \eta + \omega \wedge d\lambda = \omega \wedge \eta \pm d(\omega \wedge \lambda)$
$\Rightarrow [\omega \wedge \eta^\star] = [\omega \wedge \eta]$...

$\rightsquigarrow \wedge$ induziert
$\bigwedge : H^p_{dR}(X) \times H^q_{dR}(X) \to H^a_{dR}(X)$
$([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta]$
wobei a=p+q, falls $p+q \leq dim(X)$, sonst ist a=0. Dies ist eine zusätzliche Struktur auf $H^\bullet_{dR}(X)$

Definition :
$H^\star_{dR}(X) := \bigoplus_{p=0}^n H^p_{dR}(X)$ mit n=dim(X)
$\bigwedge : H^\star_{dR}(X) \times H^\star_{dR}(X) \to H^\star_{dR}(X)$

$\rightsquigarrow H^\star_{dR}(X)$ ist graduiert kommutative $\mathbb{R}$-algebra

Bemerkung :
Fär allgemeine topologische Räume hat $H^p(X) = H^p(X, \mathbb{Z})$ formal die selbe Struktur, wie $H_{dR^p(X)}$

Ziel:
Wir wollen im folgenden dafür da cup-Produkt definieren
$\cup : H^p(X) \times H^p(X) \to H^{p+q}(X)$

Vorbemerkungen:
FÃ$\frac{1}{4}$r $X = \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gilt:

$$H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{,für p gerade } p \leq 2n \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases} \tag{1}$$

$$H^p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{,für p gerade } p \leq 2n \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases} \tag{2}$$

Es stellt sich heraus $\exists h \in H^2(X)$ mit der Eigenschaft:
$H^2(X) = \mathbb{Z}h$
$H^4(X) = \mathbb{Z}h^2$

$H^6(X) = \mathbb{Z}h^3$
.
.
.
$H^2n(X) = \mathbb{Z}h^n$
wobei $h^2 = h \cup h,\ \cup : H^2 \times H^2 \to H^4,\ h^{n+1} = 0$
und $H^\star(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}h \oplus ... \oplus \mathbb{Z}h^n \simeq \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$

Erinnerung :
Sei $f : S^n \to S^n$, dann:
Grad(f):=m $\Leftrightarrow f_\star : H_n(S^n) \xrightarrow{m\bullet} H_n(S^n)$, wobei $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$

Sei $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, dann:

$f : X \to X,\ f_\star : H_4(X) \xrightarrow{Grad(f)} H_4(X),\ f^\star : H^4(X) \xrightarrow{Grad(f)} H^4(X)$, mit $H_4(X) = H^4(X) = \mathbb{Z}$

Bemerkung :
Es gibt keine orientierungsumkehrende Abbildung von $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Vorlesung vom 30.05.2018, LaTeXvon Maikel Hajiabadi

1.5 Das universelle Koeffiziententheorem

Wiederholung
Für den nächsten Satz müssen wir uns zunächst ein paar Begriffe ins Gedächtnis rufen.

i) Eine kurze exakte Sequenz $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ von R-Moduln heißt **spaltend**, falls eine **Spaltung** $\boldsymbol{s : C \to B}$ (Homomorphismus) existiert, sodass $\boldsymbol{\pi \circ s = id_C} \rightsquigarrow B \cong A \oplus C$
Bsp: Die folgende exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ ist exakt, jedoch $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, also **nicht spaltend**
Analog erkennt man, dass $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ nicht spaltend sein kann.

ii) Sei $f : X \to Y$ stetige Abbildung, so heißt f für den kommenden Fall **natürlich**, falls folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_p(X) \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "f_* \otimes id_G"] & H_p(X,G) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & Tor(H_{p-1}(X),G) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_p(Y) \otimes G \arrow[r] & H_p(Y,G) \arrow[r] & Tor(H_{p-1}(Y),G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Warnung: Es existiert keine natürliche Spaltung dieser Sequenzen, z.B. für den Fall $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to S^2$ „Kollabieren des 1-Skellets von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$“, diese Sequenz spaltet zwar, ist jedoch nicht natürlich! (siehe weiter unten)

Nun können wir folgendes Theorem formulieren:

Theorem („Universelles Koeffiziententheorem“)
Seien X ein topologischer Raum, G eine abelsche Gruppe
$\Rightarrow$ es existieren natürliche, spaltende, kurze exakte Sequenzen von abelschen Gruppen, welche folgende Gestalt besitzen

i) Homologie: $0 \to H_p(X) \otimes G \to H_p(X,G) \to Tor(H_{p-1}(X),G) \to 0$

ii) Cohomologie: $0 \to Ext(H_{p-1}(X),G) \to H^p(X,G) \to Hom(H_p(X),G) \to 0$

Insbesondere gelten also:

1. $H_p(X,G) \cong H_p(X) \otimes G \oplus Tor(H_{p-1}(X),G)$

2. $H^p(X,G) \cong Hom(H_p(X),G) \oplus Ext(H_{p-1}(X),G)$

Dieses Theorem folgt direkt aus einem allgemeineren abstrakten Satz über freie Kettenkomplexe und der Tatsache, dass man jede abelsche Gruppe als $\mathbb{Z}$- Modul auffassen kann:

Theorem
Seien R HIR, $(C_\circ, \delta_\circ)$ Kettenkomplex über R mit C_i freien R-Moduln, N R-Moduln
$\Rightarrow \exists$ spaltende kurze exakte Sequenzen
$0 \to H_p(C_\circ) \otimes N \to H_p(C_\circ, N) \to Tor(H_{p-1}(C_\circ), N) \to 0$
$0 \to Ext(H_{p-1}(C_\circ), N) \to H^p(C_\circ, N) \to Hom(H_p(C_\circ), N) \to 0$

Bemerkung (Zu Tor und Ext)
Sei R HIR, d.h. $\forall I \subseteq R$ Ideal gilt: $\exists a \in R : I = (a) \cong R$
Oder allgemeiner: $N \subset F, F$ freier R-Modul $\Rightarrow N$ frei
Sei nun M ein R-Modul, so versteht man unter einer **Präsentation** von M eine k.e.S.
$\boldsymbol{0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0}$, wobei F_0, F_1 freie R-Moduln sind.
Eine Wahl von Erzeugern $m_i \in M, i \in I$ liefert stets eine surjektive Abbildung
$F_0 := \bigoplus\limits_{i\in I} Re_i \underset{e_i \mapsto m_i}{\twoheadrightarrow} M$
Als **Beispiel** betrachten wir folgende Situation:
Sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Modul, also $R = \mathbb{Z}$, so liefert folgende k.e.S. eine Präsentation von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (n) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n\cdot"] \arrow[u, "1 \mapsto n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemma
Seien $0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \to M \to 0$ Präsentation von M , $\varphi : M \to M'$ Homom., dann:
$0 \to F_1' \xrightarrow{i'} F_0' \to M' \to 0$ Präsentation von M'

i) $\exists \varphi_0 : F_0 \to F_0', \varphi_1 : F_1 \to F_1'$ Homom.: $\varphi_0 \circ i = i' \circ \varphi_1$

ii) Seien $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$ zwei weitere solcher Homom.
$\Rightarrow \exists \alpha : F_0 \to F_1' : \tilde{\varphi}_0 - \varphi_0 = i' \circ \alpha$ und $\tilde{\varphi}_1 - \varphi_1 = \alpha \circ i$

Wir erhalten also folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1"'] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists \varphi_0, \tilde{\varphi}_0"] \arrow[dl, dotted, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1' \arrow[r, "i'"] & F_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Der Beweis an des Lemmas bleibt dem Leser überlassen.

Bemerkung
„Das Tensorprodukt ist **rechtsexakt**", d.h.
Sei R Ring, $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ kurze exakte Sequenz von R-Moduln und N ein weiterer R-Modul, dann ist die induzierte Sequenz
$A \otimes_R N \xrightarrow{i \otimes id_N} B \otimes_R N \xrightarrow{p \otimes id_N} C \otimes_R N \to 0$ exakt
(Ist N frei, so gilt sogar $0 \to A \otimes_R N \xrightarrow{i \otimes id_N} B \otimes_R N \xrightarrow{p \otimes id_N} C \otimes_R N \to 0$ exakt)
Analog gilt „Hom ist **linksexakt**", kurz:
R Ring, $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakt, N R-Modul
$\Rightarrow 0 \to Hom_R(C, N) \to Hom_R(B, N) \to Hom_R(A, N)$ exakt

Definition (von $Tor^R(M, N)$ & $Ext_R(M, N)$)
Wähle zunächst eine Präsentation $0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$ von M
$\Rightarrow$ N.B.: $0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ exakt
definiere:
$Tor(M, N) := ker(F_1 \otimes N \xrightarrow{i \otimes id_N} F_0 \otimes N)$
Es gilt $coker(F_1 \otimes N \xrightarrow{i \otimes id_N} F_0 \otimes N) = M \otimes_R N$
,
$0 \to Tor(M, N) \to F_1 \otimes N \xrightarrow{i \otimes id_N} F_0 \otimes N \to M \otimes_R N \to 0$ exakt
Entsprechend definiert man $Ext(M, N) := coker(Hom(F_0, N) \to Hom(F_1, N))$

Folglich erhält man also:

Bemerkung

i) $0 \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(F_0, N) \to Hom_R(F_1, N) \to Ext(M, N) \to 0$ ist exakt

ii) Tor und Ext sind wohldefiniert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "\varphi_1"'] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_0"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
0 \arrow[r] & F_1' \arrow[r, "i'"] & F_0' \arrow[r] & M'
\end{tikzcd}
,
\begin{tikzcd}
Tor(M,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & F_1 \otimes N \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_1 \otimes id_N"'] & F_0 \otimes N \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_0 \otimes id_N"] & M \otimes N \arrow[d, "\varphi \otimes id_N"] \\
Tor(M',N) \arrow[r] & F_1' \otimes N \arrow[r] & F_0' \otimes N \arrow[r] & M' \otimes N
\end{tikzcd}$$

Für alternative Wahl $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$ $\exists \alpha : F_0 \to F_1'$, sodass $\tilde{\varphi}_0 - \varphi_0 = i' \circ \alpha, \tilde{\varphi}_1 - \varphi_1 = \alpha \circ i$
$\Rightarrow$ Die induzierte Abbildung $Tor(M, N) \to Tor(M', N)$ ist unabhängig von der Wahl von φ.
Analoge Überlegungen mache man sich für Ext., folglich kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Hom(M,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & Hom(F_0,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_0^*"] & Hom(F_1,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_1^*"] & Ext(M,N) \arrow[d, "\varphi^*"] \\
Hom(M,N') \arrow[r] & Hom(F_0,N') \arrow[r] & Hom(F_1,N) \arrow[r] & Ext(M,N')
\end{tikzcd}$$

Beispiele

i) Der Funktor Tor: $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Rightarrow Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, N)$

$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ exakt

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[d, equal] \\ N \arrow[r, "2\cdot"] & N \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, N) = ker(N \xrightarrow{2\cdot} N) =, coker(N \xrightarrow{2\cdot} N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N$

Ist nun auch $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow Tor(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $coker(N \xrightarrow{2\cdot} N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

ii) Zu $Tor(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, N)$: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ exakt

$Tor(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, N) = ker(N \xrightarrow{n\cdot} N), coker(N \xrightarrow{n\cdot} N) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N$

Sei nun auch $N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$\Rightarrow coker = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/ggT(n,m)\mathbb{Z}$

$Tor(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = ker(N \to N) \cong \mathbb{Z}/ggT(n,m)$ (Übung!)

iii) $Tor(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ ($\mathbb{Q} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Q}$ nur 0 auf 0), $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$

iv) $Ext(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}$, dies liefert also eine algebraische Einführung der reellen Zahlen

v) $M \otimes N$ ist Kokern derselben Abbildung von der $Tor(M, N)$ Kern ist!

Vorlesung vom 07.06.2018, LaTeX von Julia Skudlarek Seien $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ Kettenkomplex, C_i freie R-Moduln, $C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$

$Z_q = \ker(\partial_q) \subset C_q$, $B_{q-1} = \operatorname{Im}(\partial_q) \subset C_{q-1} \Rightarrow Z_q$, B_q freie R-Moduln

$0 \to B_q \to Z_q \to H_q(C_\bullet) \to 0$ eine Präsentation von $H_q(C_\bullet)$

Sei außerdem

$$\begin{array}{ccccccccc} & & B_q & \xrightarrow{0} & B_{q-1} & \xrightarrow{0} & B_{q-2} & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \ldots & \to & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \to & \ldots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & Z_{q+1} & \xrightarrow{0} & Z_q & \xrightarrow{0} & Z_{q-1} & & \end{array}$$

eine kurz exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$0 \to Z_\bullet \to C_\bullet \to \overline{B_\bullet} \to 0$; $\overline{B_q} := B_{q-1}$ spaltet $\forall q$

Nehme Hom(-,N), dann ist

$$0 \to \operatorname{Hom}(\overline{B_\bullet}, N) \to \operatorname{Hom}(C_\bullet, N) \to \operatorname{Hom}(Z_\bullet, N) \to 0$$

eine kurz exakte Sequenz von Kettenkomplexen und

$H^{p-1}(\operatorname{Hom}(Z_\bullet, N)) \to H^p(\operatorname{Hom}(\overline{B_\bullet}, N)) \to H^p(\operatorname{Hom}(C_\bullet, N)) \to H^p(\operatorname{Hom}(Z_\bullet, N)) \to H^{p+1}(\operatorname{Hom}(\overline{B_\bullet}, N$

eine lange exakte Homologiesequenz.

$$0 \to \operatorname{coker}(S^{p-1}) \to H^p(\operatorname{Hom}(C_\bullet, N)) \to \ker(S^p) \to 0 \text{ kurz exakte Sequenz}$$

$$\begin{array}{ccc} H^p(\operatorname{Hom}(Z_\bullet, N)) & \xrightarrow{\delta^p} & H^{p+1}(\operatorname{Hom}(\overline{B_\bullet}, N)) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \operatorname{Hom}(Z_p, N) & \xrightarrow{\delta^p} & \operatorname{Hom}(B_p, N) \end{array}$$

$\operatorname{Hom}(-, N)$ auf $0 \to B_p \to Z_p \to H_p(C_\bullet) \to 0$ anwenden, dann gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \operatorname{Hom}(H_p(C_\bullet, N) & \to & \operatorname{Hom}(Z_p, N) & \to & \operatorname{Hom}(B_p, N) & \to & \operatorname{Ext}(H_p, (C_\bullet), N) & \to & 0 \\ & & \shortparallel & & & & & & \shortparallel & & \\ & & \ker \delta^p & & & & & & \operatorname{coker}\delta^p & & \end{array}$$

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{p-1}, (C_\bullet), N) \to H^p(\operatorname{Hom}(C_\bullet, N)) \to \operatorname{Hom}(H_p(C_\bullet, N) \to 0$$

also universelles Koeffizienten Theorem und diese Sequenz spaltet!

Bemerkung
$R = \mathbb{Z}$

1. Haben gesehen: $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}) = 0$

   $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ $=\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}) = 0$,d.h. $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Q})$ $=\mathrm{Tor}(G, \mathbb{Q})$=0 $\forall G$ endlich erzeugte abelsche Gruppen

   Universelles Koeffizienten Theorem: wenn $H_i(C_\bullet)$ endlich erzeugte abelsche Gruppe:

$$H_i(C_\bullet) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H_i(C_\bullet \otimes \mathbb{Q})$$

$$H_i(\mathrm{Hom}(C_\bullet) \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_i(C_\bullet) \otimes \mathbb{Q})$$

   z.B X endl. CW Raum

$$H_i(X, \mathbb{Q}) = H_i(X) \otimes \mathbb{Q}$$

$$H^i(X, \mathbb{Q}) = H^i(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{Hom}(H_i(X), \mathbb{Q})$$

$$\beta_i = \text{rang } H_i(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q})$$

2. Die Abbildung $H^p(\mathrm{Hom}(C_\bullet), N) \to \mathrm{Hom}(H_p(C_\bullet, N)$ ist das selbe wie die “Paarung” $H^p(\mathrm{Hom}(C_\bullet), N) \times H_p(C_\bullet) \to N$

$$\begin{array}{lccc} N, C \text{ R-Moduln} & \mathrm{Hom}(C, N) \times C & \to & N \\ & (\varphi : C \to N) \times a & \mapsto & \varphi(a) =:< \varphi, a >=< \varphi|a > \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} C_\bullet\text{Kettenkomplex} & \mathrm{Hom}(C_p, N) \times C_p & \to & N \\ & \varphi, a & \mapsto & < \varphi|a > \end{array}$$

$$C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}$$

$$\mathrm{Hom}(C_{p-1}, N) \xrightarrow{\delta_p} \mathrm{Hom}(C_p, N)$$

$$< \delta\varphi|a >=< \varphi, \partial a >$$

$$H^p(\mathrm{Hom}(C_\bullet, N) \times H_p(C_\bullet) \xrightarrow{<-,->} \sim \text{ wohldef.}$$

$\varphi \in C^p, \delta_p = 0$, $a \in C_p, \partial a = 0$, $< \varphi | a >$ hängt nur von Klasse $[a] \in H_p(C_\bullet)$, $\varphi \in H^p(C_\bullet)$ ab.

1.6 Cup & Cap

X topologischer Raum, $S_\bullet(X)$ singulärer Kettenkomplex, R Ring,$S_\bullet = S_\bullet(X) \otimes R$ Kettenkomplex von X, $S^\bullet = \mathrm{Hom}(S_\bullet(X), R)$ Kokettenkomplex

$H_i(X) := H_i(S_\bullet)$, $H^i(X) := H^i(S^\bullet)$ R-Moduln

Wir werden das Cup-Produkt wie folgt konstruieren:

$$\cup : H^p(X) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X)$$

wobei wir $H * (X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(X)$ als "totale Kohomologie" bezeichnen.

$\rightsquigarrow H * (X)$ gr. comm. R-Alg. ("Kohomologie Ring") und

$f : X \to Y \rightsquigarrow f* : H^*(Y) \to H * (X)$ Morphismus von gr. comm. R-Alg.

1.6.1 Cap-Produkt

$\cap : H^p(X) \times H_{p+q}(X) \to H_q(X)$

$H_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k(X)$ ist $H^*(X)$-Modul

Danach: $R = \mathbb{Z}$, X kompakte zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit

Falls diese orientiert ist bezeichnen wir: $[x] \in H_n(X, \mathbb{Z})$ als "Fundamentalklasse von X"

und $p : H^p(X) \xrightarrow{\sim} H_{n-p}(X)$ mit $c \mapsto c \cap [x]$ als "Poincare Dualität"

$\rightsquigarrow \beta_p = \beta_{n-p}$

Notation: $\underline{f} : \{0, ..., p\} \to \{0, ..., q\}$ definiert eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p & \to & \Delta_q \\ e_i & \mapsto & e_{\delta(i)} \end{array}$$

Setze diese affin linear fort,zB zu $\underline{\partial}_i : \{0, .., p-1\} \to \{0, ..., p\}$ "lasse i aus"

$$\Delta_{p-1} \to \Delta_p \xrightarrow{\sigma} X$$

wobei gilt

$$\Delta_{p-1} \xrightarrow{\sigma^{(i)}} X$$

mit

$$\partial\sigma := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

Beispiel $\underline{\partial}_3\{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4,5\}$, dann gilt: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$,$2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 5$

Definition p, q Zahlen $n = p + q$

$\underline{\lambda}_{p,n} := \underline{\lambda}_p : \{0, .., p\} \to \{0, .., n\}$ vermittels $i \mapsto i$ und

$\underline{\rho}_{q,n} := \underline{\rho}_q : \{0, ..., q\} \to \{0, .., n\}$ vermittels $i \mapsto p + i$

wobei $\lambda_{p,n} : \Delta_p \to \Delta_n$, $\rho_{q,n} : \Delta_q \to \Delta_n$

1.6.2 Cup-Produkt

$S^* = \bigoplus S^k$, $S^k = S^k(X) = \mathrm{Hom}(S_k(x), R)$, $c \in S^p$, $d \in S^q$,

$c \cup d \in S^{p+q}$ wird definiert durch:

$$< c \cup d|\sigma >=< c|\sigma \circ \lambda_{p,n} >\cdot < d|\sigma \circ \rho_{q,n} >\in R$$

wobei $\cdot$ das Produkt in R und $\sigma \in S_{p+q}$

Allgemein gilt: $c = \sum c_p \in S*$, $c_p \in S^p$, $d = \sum d_q \in S*$, $d_q \in S^q$

$$c \cup d = \sum_{p,q} c_p \cup d_q$$

Proposition $\cup : S^* \times S^* \to S^*$ *ist bilinear und assoziativ* ($\rightsquigarrow S^*$ *ist assoziative R-Algebra). Es gibt ein Eins-Element:* $1 \in S^*$. $f : X \to Y$ *stetig,* $f^* : S^*(Y) \to S^*(X)$

wobei: $f^*(c \cup d) = f^*(c) \cup f^*(d)$

Beweis
Bilinear: nach Konstruktion

Assoziativität: $c \in S^p$, $d \in S^q$, $e \in S^r$, $\sigma \in S_n$, $n = p + q + r$

$$< (c \cup d) \cup e|\sigma > = < c \cup d|\sigma \circ \lambda_{p+q,n} > \cdot < e|\sigma \circ \rho_{r,n} >$$

$$= < c|\sigma \circ \lambda_{p+q,n} \circ \lambda_{p,p+q} > \cdot < d|\sigma \circ \lambda_{p+q,n} \circ \rho_{q,p+q} > \cdot < e|\sigma \circ \rho_{r,n} >$$

$$= < c|\sigma \circ \lambda_{p,n} > \cdot < d|\sigma \circ \mu_{q,n} > \cdot < e|\sigma \circ \rho_{r,n} > = ...$$

$$= < c \cup (d \cup e)|\sigma >$$

Eins-Element: $1 \in S^*$ wird definiert durch festlegen

$$< 1|\sigma > = 1 \; \forall \sigma : \Delta_* \to X \text{ also Punkte in X)}$$

Dann gilt

$$1 \cup d = d \cup 1 = d$$

und $f : X \to Y$, mit $c \in S^p(Y)$, $d \in S^q(Y)$, $n = p + q$

$$f^* : S^p(Y) \to S^p(X)$$

$$< f^*(c \cup d)|\sigma > = < c \cup d|f\sigma >$$

$$= < c|f \circ \sigma \circ \lambda_{n,p} > \cdot < d|f \circ \sigma \circ \rho_{q,n} >$$
$$= < f^*c|\sigma \circ \lambda_{p,n} > \cdot < f^*d|\sigma \circ \rho_{q,n} >$$

$$= < f^*c \cup f^*d|\sigma >$$

$\square$

Vorlesung vom 13.06.2018, LaTeXvon Cornelius Bergmann

Erinnerung
Status Quo: Zu jedem topologischen Raum X und kommutativem Ring mit Eins R hatten wir den Kokettenkomplex $S^* := S^*(X; R)$ konstruiert:

$$(X, R) \rightsquigarrow S^* := \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p \ , \ S^p := S^p(X; R) \text{ mit Korandabbildung } \delta := \delta^p : S^p \to S^{p+1}$$

und festgestellt, dass dieser die Struktur einer assoziativen graduierten R-Algebra mit Eins besitzt, deren die Multiplikation durch das Cup-Produkt $\cup : S^p \times S^q \to S^{p+q}$ vermittelt wird. Auf Kokettenniveau hatten wir $\cup$ durch

$$\langle c \cup d | \sigma \rangle := \langle c | \sigma \lambda_p \rangle \cdot \langle d | \sigma \rho_q \rangle \text{ für } c \in S^p,\ d \in S^q,\ \sigma \in S_{p+q}$$

definiert. Hier bezeichnen $\lambda_p := \lambda_{p,n} : \triangle_p \to \triangle_n$ die Projektion auf die p-dimesionale linke Seite des Einheitssimplex $\triangle_n$ und $\rho_q := \rho_{q,n} : \triangle_q \to \triangle_n$ entsprechend die Projektion auf die q-dimensionale rechte Seite von $\triangle_n$.

Bemerkung
Diese Zuordnung ist natürlich - das bedeutet, jede stetige Abbildung $X \to Y$ induziert eine Kokettenabbildung $S^*X \to S^*Y$. In kategorieller Sprache würden wir S^* daher als einen *Funktor* von der *Kategorie TOP* der topologischen Räume in die der (Ko-)kettenkomplexe $KETT$ bezeichnen.

Nun wollen wir die Eigenschaften dieser R-Algebra weiter untersuchen. Zuerst betrachten wir dazu, wie die Korandabbildung δ und $\cup$ vertauschen. Wir sehen, dass δ als Algebrenabbildung die Leibnizregel erfüllt - δ ist also eine Derivation. Der aufmerksame Leser bemerke die Analogie zur Cartan-Ableitung im de-Rham-Komplex der Differentialformen (wo die Algebrenmultiplikation durch das Wedge-Produkt $\wedge$ gegeben ist).

Theorem
Für $c \in S^p$ und $d \in S^q$ gilt

$$\delta(c \cup d) = \delta c \cup d + (-1)^p c \cup \delta d.$$

Beweis
durch Ausschreiben beider Seiten. Es seien dazu $c \in S^p$, $d \in S^q$ und $\sigma \in S^{p+q+1}$. Wir berechnen die einzelnen Terme:

$$\langle \delta c \cup d | \sigma \rangle = \langle c | \partial(\sigma \lambda_{p+1}) \rangle \cdot \langle d | \sigma \rho_q \rangle \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \langle c | \sigma [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{p+1}] \rangle \cdot \langle d | \sigma \rho_q \rangle,$$

wobei wir in $(*)$ die Gleichung

$$\partial(\sigma\lambda_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i(\sigma\lambda_{p+1})^{(i)} = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\sigma[e_0,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_{p+1}] \tag{$*$}$$

eingesetzt und dann die Linearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ genutzt haben. Weiter berechnen wir

$$\langle c\cup\delta d|\sigma\rangle = \langle c|\sigma\lambda_p\rangle\cdot\langle d|\partial(\sigma\rho_{q+1})\rangle \overset{(**)}{=} \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\langle c|\sigma\lambda_p\rangle\cdot\langle d|\sigma[e_p,\ldots,\hat{e}_{p+j},\ldots,e_{p+q+1}]\rangle,$$

auch hier wird $(**)$ durch eine analoge Formel wie vorher vermittelt:

$$\partial(\sigma\rho_{q+1}) = \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j(\sigma\rho_{q+1})^{(j)} = \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\sigma[e_p,\ldots,\hat{e}_{p+j},\ldots,e_{p+q+1}]. \tag{$**$}$$

Den dritten Term berechnen wir dann zu

$$\begin{aligned}
\langle\delta(c\cup d)|\sigma\rangle \quad &= \quad \langle c\cup d|\partial(\sigma)\rangle = \sum_{k=0}^{p+q+1}(-1)^k\langle c\cup d|\sigma[e_0,\ldots,\hat{e}_k,\ldots,e_{p+q+1}]\rangle\\
&= \quad \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\langle c|\sigma[e_0,\ldots,\hat{e}_k,\ldots,e_{p+1}]\rangle\cdot\langle d|\sigma[e_{p+1},\ldots,e_{p+q+1}]\rangle\\
&+ \quad \sum_{k=p}^{p+q+1}(-1)^k\langle c|\sigma[e_0,\ldots,e_p]\rangle\cdot\langle d|\sigma[e_p,\ldots,\hat{e}_k,\ldots,e_{p+q+1}]\rangle\\
&\underset{\text{im 2. Term}}{\overset{k=p+l}{=}} \quad \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\langle c|\sigma[e_0,\ldots,\hat{e}_k,\ldots,e_{p+1}]\rangle\cdot\langle d|\sigma[e_{p+1},\ldots,e_{p+q+1}]\rangle\\
&+ \quad \sum_{l=p}^{q+1}(-1)^{p+l}\langle c|\sigma\lambda_p\rangle\cdot\langle d|\sigma[e_p,\ldots,\hat{e}_{p+l},\ldots,e_{p+q+1}]\rangle\\
&= \quad \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\langle c|\sigma[e_0,\ldots,\hat{e}_k,\ldots,e_{p+1}]\rangle\cdot\langle d|\sigma\rho_q\rangle\\
&+ \quad (-1)^p\sum_{l=p}^{q+1}(-1)^l\langle c|\sigma\lambda_p\rangle\cdot\langle d|\sigma[e_p,\ldots,\hat{e}_{p+l},\ldots,e_{p+q+1}]\rangle\\
&= \quad \langle\delta c\cup d|\sigma\rangle + (-1)^p\langle c\cup\delta d|\sigma\rangle,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Setzen wir für c oder d nun Zykel oder Ränder ein, erhalten wir direkt das folgende

Korollar *1)* $Z^* \subset S^*$ *ist ein Unterring,*
2) B^* *ist ein zweiseitiges Ideal in* Z^**.*

Beweis
1): Für $c, d \in Z^*$ ist nach der Leibnizregel $\delta(c \cup d) = 0 \pm 0 = 0$, also $c \cup d \in Z^*$.
2): Für $b = \delta a, d \in Z^*$ gilt dann $b \cup d = (\delta a \cup d) = \delta(a \cup d) \pm a \cup \underbrace{\delta d}_{=0} = \delta(a \cup d)$ und ebenso $d \cup b = \delta(d \cup a)$. □

Das bedeutet, unsere Produktstruktur steigt auf den Quotientenmodul $H^* := \bigoplus_{p=0}^{\infty} Z^p/B^p$ ab! Also trägt auch die Kohomologie die Struktur einer graduierten R-Algebra. Assoziativität und das Einselement werden natürlich an den Quotienten vererbt.

1.7 Kommutativitätseigenschaften von $\cup$

Wir haben nun für jeden topologischen Raum X und kommutativen Ring mit Eins R zwei assoziative, graduierte R-Algebren mit Eins konstruiert, nämlich $S^* = \bigoplus S^p$ und $H^* = \bigoplus H^p$. Auf beiden haben wir eine Multiplikation, die wir beide mit $\cup$ bezeichnen. Wir untersuchen $\cup$ nun auf Kommutativität und werden feststellen, dass $\cup$ auf H^* graduiert kommutativ, sprich kommutativ bis auf gradabhängiges Vorzeichen ist, auf S^* aber nicht.

Definition
Es sei $A^* = \bigoplus_{p=0}^{\infty} A^p$ eine graduierte R-Algebra. A heißt *graduiert kommutativ*, falls

$$a \cdot b = (-1)^{pq} b \cdot a \text{ für alle } a \in A^p,\ b \in A^q$$

gilt.

Beispiel
S^* ist im Allgemeinen nicht graduiert kommutativ; konkret im - sehr elementaren - Fall $X = \triangle_1 = \underset{e_0}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{e_1}{\bullet}$ .Wir definieren

$$c \in S^0;\quad \langle c|\sigma\rangle \quad := \quad \begin{cases} 1 \text{ falls } \sigma : \triangle_0 \to \triangle_1\,,\ e_0 \mapsto e_0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$d \in S^1;\quad \langle d|\sigma\rangle \quad := \quad \begin{cases} 1 \text{ falls } \sigma = id : \triangle_1 \to \triangle_1 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Eine einfache Rechnung zeigt dann, dass c und d nicht (graduiert) kommutieren:

$$\langle c \cup d|id\rangle = \langle c|id\lambda_0\rangle \cdot \langle d|id\rho_1\rangle = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 = 1 \cdot 0 = \langle d|id\lambda_1\rangle \cdot \langle c|id\rho_0\rangle = \langle d \cup c|id\rangle.$$

Satz $(H^*, \cup)$ *ist graduiert kommutativ, sprich*

$$a \cup b = (-1)^{pq} b \cup a \text{ für alle } a \in H^p,\ b \in H^q.$$

Der Beweis funktioniert nicht durch direktes Nachrechnen, da die Aussage auf Kozykelniveau falsch ist. Wir werden uns dem Beweis nun sukzessive nähern.
Zuerst definieren wir eine Abbildung $\underline{\vartheta}$, die die Ecken eines Elementarsimplex $\triangle_n$ permutiert:
Definition

$$\begin{array}{rcl} \underline{\vartheta} : \{0, \dots, p\} & \to & \{0, \dots, p\} \\ i & \mapsto & p - i \end{array}$$

und bemerken

i) $sgn(\underline{\vartheta}) = (-1)^{p(p+1)/2} =: \varepsilon_p$

ii) $\underline{\vartheta}$ induziert Abbildungen

1) $\vartheta : \triangle_p \to \triangle_p$

2) $\theta_p : S_p \to S_p$, $\sigma \mapsto \varepsilon_p \cdot \sigma \circ \vartheta_p$
$\rightsquigarrow \theta : S_* \to S_*$

3) $\theta_p^t : S^p \to S^p \theta^t : S^* \to S^*$ definiert durch $\langle \theta_p^t(c) | \sigma \rangle = \langle c | \theta_p(\sigma) \rangle$
$\rightsquigarrow \theta^t : S^* \to S^*$.

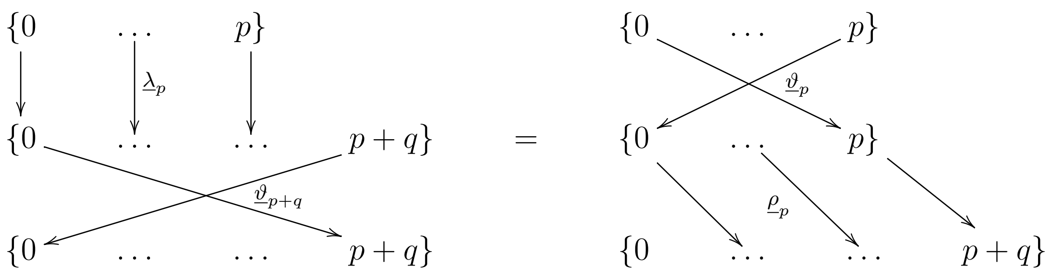
Die Abbildung θ_p^t nennen wir auch die *Adjungierte zu* θ_p.

Lemma $\theta^t(c \cup d) = (-1)^{pq} \theta^t(d) \cup \theta^t(c)$ *für alle* $c \in S^p$, $d \in S^q$.

Beweis
Für $\lambda_p : \triangle_p \to \triangle_{p+q}$ und $\rho_q : \triangle_q \to \triangle_{p+q}$ gelten die Regeln

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_{p+q} \lambda_p & = & \rho_p \vartheta_p \\ \vartheta_{p+q} \rho_q & = & \lambda_q \vartheta_q. \end{array}$$

Deren Gültigkeit machen wir uns klar, indem wir uns die Wirkungen von λ, ρ und ϑ an einem Diagramm klarmachen:



Diese Regeln nutzen wir nun und berechnen

$$\begin{aligned}
\langle\theta^t(c\cup d)|\sigma\rangle &= \langle c\cup d|\theta(\sigma)\rangle \\
&= \varepsilon_{p+q}\langle c\cup d|\sigma\vartheta_{p+q}\rangle \\
&= \varepsilon_{p+q}\langle c|\sigma\vartheta_{p+q}\lambda_p\rangle\cdot\langle d|\sigma\vartheta_{p+q}\rho_q\rangle \\
&= \varepsilon_{p+q}\langle c|\sigma\rho_p\vartheta_p\rangle\cdot\langle d|\sigma\lambda_q\vartheta_q\rangle \\
&= \varepsilon_{p+q}\langle d|\sigma\lambda_q\vartheta_q\rangle\cdot\langle c|\sigma\rho_p\vartheta_p\rangle \\
&= \varepsilon_{p+q}\varepsilon_p\varepsilon_q\langle d|\theta_q(\sigma\lambda_q)\rangle\cdot\langle c|\theta_p(\sigma\rho_p)\rangle \\
&= \varepsilon_{p+q}\varepsilon_p\varepsilon_q\langle\theta^t(d)|\sigma\lambda_q\rangle\cdot\langle\theta^t(c)|\sigma\rho_p\rangle \\
&= (-1)^{pq}\langle\theta^t(d)\cup\theta^t(c)|\sigma\rangle.
\end{aligned}$$

□

Es gelingt uns also, c und d zu vertauschen, der Preis dafür ist aber die Operation θ^t. Daher liegt es nahe, Eigenschaften von θ^t zu untersuchen, insbesondere, ob θ^t nach H^* absteigt.

Lemma $\partial\theta = \theta\partial$ ($\Rightarrow \delta\theta^t = \theta^t\delta$), *das heißt,* $\theta : S_* \to S_*$ *ist eine Kettenabbildung.*

Erinnerung
An dieser Stelle wollen wir an die Abbildungen $\underline{d}_i$ erinnern, die folgendermaßen definiert wurden:

$$\underline{d}_i : \{0,\dots,p-1\} \to \{0,\dots,p\} \text{ monoton und } i \notin Im(\underline{d}_i).$$

und die davon induzierten Abbildungen $d_i : \triangle_{p-1} \to \triangle_p$.
Für $\sigma \in S_n$ hatten wir den $(n-1)$-Simplex, der aus σ durch Weglassen der i-ten Ecke hervorgeht, durch $\sigma^{(i)} := \sigma \circ d_i$ definiert.

Beweis
Für $\sigma \in S_p$ gilt nach Definition

$$\partial(\theta_p(\sigma)) = \varepsilon_p\partial(\sigma\vartheta_p) = \varepsilon_p\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\sigma\vartheta_p)^{(i)}.$$

Wir behaupten, dass

$$\underline{\vartheta}_p\underline{d}_i = \underline{d}_{p-i}\underline{\vartheta}_{p-1}$$

gilt und verifizieren dies wieder durch Diagramme:

$$
\begin{tikzcd}
\{0 & \dots \arrow[d, "d_i"] & p-1\} \\
\{0 \arrow[drr] & \dots & p\} \arrow[dll, "\vartheta_p"'] \\
\{0 & \dots & p\}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\{0 \arrow[drr] & \dots & p-1\} \arrow[dll, "\vartheta_{p-1}"'] \\
\{0 & \dots \arrow[d, "d_{p-i}"] & p-1\} \\
\{0 & \dots & p\}
\end{tikzcd}
$$

Dann gilt auch $\vartheta_p d_i = d_{p-i}\vartheta_{p-1}$ und schlussendlich $(\sigma\vartheta_p)^{(i)} = \sigma^{(p-i)}\vartheta_{p-1}$.
Das führt uns zur gesuchten Beziehung

$$\partial\theta_p(\sigma) = \varepsilon_p \sum(-1)^i(\sigma\vartheta_p)^{(i)}\varepsilon_p \underbrace{\sum(-1)^i\sigma^{(p-i)}}_{\substack{=\sum(-1)^{p-j}\sigma^{(j)} \\ =(-1)^p\sum(-1)^j\sigma^{(j)}}} \vartheta_{p-1} = \underbrace{\varepsilon_p\varepsilon_{p-1}(-1)^p}_{\substack{=(-1)^{p(p+1)/2+(p-1)p/2+p} \\ =(-1)^{p^2+p}=(-1)^{p(p+1)}=1}} \theta_p(\partial\sigma) = \theta_p(\partial\sigma).$$

□

Folgerung
Wir erhalten induzierte Abbildungen $\theta : H_* \to H_*$ und $\theta^t : H^* \to H^*$.

Wenn wir nun zeigen, dass θ und θ^t identisch auf H_* respektive H^* operieren, haben wir die graduierte Kommutativität von H^*, unser eigentliches Ziel, gezeigt. Genau das besagt folgende Proposition, die wir später beweisen werden:

Proposition *$\theta : S_* \to S_*$ ist kettenhomotop zur Identität, das heißt, es gibt $J_p : S_p \to S_{p+1}$ so, dass $\theta_p - id = \partial_{p+1}J_p + J_{p-1}\partial_p$ gilt.*

Folgerung
$\cup : H^p \times H^q \to H^{p+q}$ ist graduiert kommutativ, sprich

$$[c \cup d] = [\theta^t(c \cup d)] = (-1)^{pq}[\theta^t(d) \cup \theta^t(c)] = (-1)^{pq}[d \cup c].$$

Vorlesung vom 14.06.2018, LaTeX von Rieke Deimer

1.8 Azyklische Modelle

Wir betrachten folgende Abbildung: $\vartheta_p : \{0, ..., p\} \to \{0, ..., p\}, i \mapsto p - i$.
Dies induziert
$\vartheta_p : \Delta_p \to \Delta_p$
$\theta_p : S_p(X) \to S_p(X)$
$\theta : S_\circ(X) \to S(X)$,
welche wiederum absteigt auf
$\theta_p : H_p(X) \to H_p(X)$.
Behauptung: Die letzte Abbildung entspricht der Identität!

Die Homologie-Funktion ist hierbei speziell, denn es gelten:

i) $S_p(X)$ wird frei erzeugt durch $\sigma : \Delta_p \to X$

ii) Es ist $H_*(\Delta_p) = \begin{cases} R, \text{ falls } i = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

FÃ¼r alle $\sigma \in S_p(X)$ existiert ein $S_\circ^\sigma \subset S_\circ(X)$, welches σ enthält.
Es ist $H_i(S_i^\sigma) = 0, i > 0$ (azyklisch).

Lemma
Sei $\varphi : S_\circ(X) \to S_\circ(X)$ eine Kettenabbildung. Nehme weiter an:

i) $\varphi_0 : S_0(X) \to S_0(X)$ ist 0-Abbildung

ii) FÃ¼r alle $\sigma \in S_0(X)$ gilt $\varphi(\sigma) \subset S^\sigma$

Dann gilt: $\varphi \overset{htp.}{\simeq} 0$, d.h. es existiert eine Kettenhomotopie, s.d. $\partial J + J\partial = \varphi$ (also $\varphi_p = \partial_{p+1} J_p + J_{p-1}\partial_p$).

Beweis
Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d] & S_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "\varphi_p"] \arrow[dl, dotted] & S_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{p-1}"] \arrow[dl, dotted] & \cdots \arrow[r] & S_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & S_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dl, dotted] & S_0 \arrow[d, "\varphi_0"] \arrow[dl, dotted, "J_0"] \\
S_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] & S_p \arrow[r, "\partial_p"] & S_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & S_2 \arrow[r, "\partial_2"] & S_1 \arrow[r, "\partial_1"] & S_0
\end{tikzcd}$$

Nun werden induktiv $J_p : S_p \to S_{p+1}$ konstruiert mit $\varphi_p = \partial_{p+1} J_p + J_{p-1}\partial_p$.
Wir setzen zu Beginn $J_0 = 0$.

Sei $\sigma \in S_1$, dann ist $\partial\varphi_1(\sigma) = \varphi_0(\partial\sigma) = 0$, also $\varphi_1(\sigma) = \partial\tau$ mit $\tau \in S^\sigma$.
Setze also $J_1(\sigma) := \tau$, dann gilt $\varphi_1(\sigma) = \partial J_1 + J_0\partial$.
Nun wird angenommen, dass $J_0, ..., J_{p-1}$ bereits konstruiert sind (wobei gelte $J_k(\sigma) \in S^\sigma_\circ$).
Sei $\sigma \in S_p$, so ist $\partial_p\varphi_p(\sigma) = \varphi_{p-1}(\partial\sigma) = \partial_p J_{p-1}(\partial\sigma) + \underbrace{J_{p-2}\partial\partial\sigma}_{=0}$. Es gilt also $\partial(\varphi_p(\sigma) - J_{p-1}(\partial\sigma)) = 0$.
Es gibt ein $\tau \in S^\sigma$ mit $\varphi_p(\sigma) - J_{p-1}(\partial\sigma) = \partial\tau$, wir setzen also $J_p(\sigma) = \tau$.
$\Rightarrow \varphi_p(\sigma) = (\partial J_p + J_{p-1}\partial)(\sigma)$ fÃ$\frac{1}{4}$r $\sigma \in S_p$.

q.e.d.

Anwendung
Betrachtet man $\varphi = \theta - Id$, wobei $\varphi_0 = \theta_0 - Id = 0$ und $\varphi(\sigma) \subset S^\sigma_\circ$, so sind die Voraussetzungen des eben bewiesenen Lemmas erfÃ$\frac{1}{4}$llt und es folgt, dass $\varphi \overset{htp.}{\simeq} 0$, wegen der Wahl von φ muss also $\theta \overset{htp.}{\simeq} Id$ gelten.

1.9 Cap-Produkt

Wir definieren zunächst die AbkÃ$\frac{1}{4}$rzungen $S_p := S_p(X) = S_p(X, R), S^p := S^p(X) = S^p(X, R)$.
Nun legen wir eine Operation $\cap : S^q \times S_{p+q} \to S_p$ durch die Bedingung fest, dass
$< c \cup d\big|\sigma > = < c\big|d \cap \sigma >$, d.h. das *Cap-Produkt* $\cap$ ist die Adjungierte vom Cup-Produkt $\cup$.
Weiter gilt: $< c \cup d\big|\sigma > = < c\big|\sigma\lambda_p >< d\big|\sigma\rho_q > = < c\big|< d\big|\sigma\rho_q > \sigma\lambda_p >$,
das heißt, das Cap-Produkt lässt sich durch $d \cap \sigma = < d\big|\sigma\rho_q > \sigma\lambda_p$ explizit darstellen.
Die weiteren Eigenschaften von $\cap$ folgen direkt aus den Eigenschaften vom Cup-Produkt $\cup$. Die wichtigsten seien hier nun aufgelistet:

i) $(c \cup d) \cap \sigma = c \cap (d \cap \sigma) \Rightarrow S_*$ wird zum graduierten Modul Ã$\frac{1}{4}$ber dem graduiertem Ring S^* (und der Grad von $\sigma \in S_p$ ist $-p$)

ii) Verträglichkeit mit Randoperator: $\partial(d \cap \sigma) = (-1)^{p+1}\delta d \cap \sigma + d \cap \partial\sigma \Rightarrow \cap$ steigt ab zu einer Operation $\cap : H^q \times H_{p+q} \to H_p \Rightarrow H_*(X)$ ist also $H^*(X)$-Modul!
<u>Rechnung:</u> $< e \cup (c \cup d)\big|\sigma > = < e\big|(c \cup d) \cap \sigma >$
Wegen Assoziativität von $\cup$ ist auch $< e \cup (c \cup d)\big|\sigma > = < (e \cup c) \cup d\big|\sigma > = < e \cup c\big|d \cap \sigma > = < e\big|c \cap (d \cap \sigma) >$
$\delta(c \cup d) = \delta c \cup d + (-1)^p c \cup \delta d$ wobei $c \in S^p, d \in S^q$
$< \delta cud\big|\sigma > = < \delta c\big|d \cap \sigma > = < c\big|\partial(d \cap \sigma >$
$< c \cup \delta d\big|\sigma > = < c\big|\delta(d) \cap \sigma >$
$d \cap \partial\sigma = \partial(d \cap \sigma) + (-1)^p\delta(d) \cap \sigma$

iii) Verhalten unter stetigen Abbildungen:
Sei $f : X \to Y$, stetig zwischen den topologischen Räumen X und Y.
Es ist $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ kovariant (Homologie),
$f^*(Y) \Rightarrow H^*(X)$ kontravariant (Cohomologie).

$$\begin{tikzcd}
H^q(X) \times H_{p+q}(X) \arrow[r, "\cap"] & H_p(X) \\
H^q(Y) \times H_{p+q}(Y) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\cap"] & H_p(Y)
\end{tikzcd}$$

Es gilt also fÃ¼r $c \in H^q(Y), \sigma \in H_{p+q}(X)$ die *Projektionsformel* $f_*(f^*(c) \cap \sigma) = c \cap f_*(\sigma)$.

Beweis
Hierfür muss man lediglich der Nase folgen, dieser Beweis ist eine gute Übung für das formale Spiel mit Klammern und Abbildungen.

Definition
Refined Cap (verfeinertes Cap-Produkt)
Mit $A \hookrightarrow X$ definiere ein Raumpaar (X, A), $H_*(X, A)$ eine lange Homologiesequenz mit $H_*(X), H_*(A)$ und $H^*(X, A)$ eine lange exakte Cohomologiesequenz mit $H^*(X), H^*(A)$.
Auf Ebene der Ketten bzw. Cokettenkomplexe erhalten wir also:
$0 \to S_\circ(A) \to S_\circ(X) \to S_\circ(X, A) \to 0$, dies ist fÃ¼r jeden Grad eine spaltende exakte Sequenz,
$0 \to S^\circ(A) \to S^\circ(X) \to S^\circ(X, A) \to 0$ hier ebenfalls
$S^\circ(X) \times S_\circ(X) \xrightarrow{\cap} S_\circ(X)$, (man beachte hier die Indexverschiebung),
es ergibt sich $S^\circ(X, A) \times S_\circ(X, A) \xrightarrow{\cap} S_\circ(X)$.

Upshot:Das verfeinerte Cap-Produkt $\cap : H^q(X, A) \times H_{p+q}(X, A) \to H_p(X)$ wird induziert vom Cap-Produkt $\cap : S^\circ \times S_\circ \to S_\circ$

2 PoincarÃ©-Dualität

2.1 Homologische Orientierung

Definition
Eine *(topologische) Mannigfaltigkeit* der Dimension n ist ein Topologischer Raum M (hier immer Hausdorffsch), s.d. fÃ¼r alle $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ existiert, welche homÃ¶omorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. wir kÃ¶nnen uns M zumindest *lokal* als $\mathbb{R}^n$ vorstellen.

Also: $\forall x \in M\ \exists \varphi : M \supset U \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathbb{R}^n, x \mapsto 0$, solche HomÃ¶omorphismen φ bezeichnen wir als *Karte fÃ¼r* M bei x.

Lemma
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Dann gilt stets

$$H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} R, \text{ falls } i = n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

wobei $H_i(-) := H_i(-, R)$.

Beweis
Mit Ausschneidungslemma: $H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow[\cong]{\varphi} H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = H_i(B^n, B^n \setminus \{0\})$ und

$$H_i(B^n, B^n \setminus \{0\}) \cong H_i(B^n, \partial B^n) \cong \begin{cases} R, \text{ falls } i = n \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}.$$

Definition
Eine *(homologische) Orientierung* von M in $x \in M$ ist eine Wahl eines Erzeugers $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ fÃ¼r $H_n(M, M \setminus \{x\})$.

Beispiele
Gilt $R = \mathbb{Z}$, so ist $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$. Bekanntermaßen hat $\mathbb{Z}$ die beiden Erzeuger 1 und -1, d.h. es gibt in diesem Fall zwei verschiedene Orientierungen in x.

Betrachtet man $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so stellt man fest, dass es nur eine mÃ¶gliche Orientierung im Punkt x gibt, denn $H_n(M, M \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und dies hat bekanntlich nur einen Erzeuger.

Sei nun $X = \mathbb{R}^n$ der zugrundeliegende topologische Raum und B ein Ball mit $x, y \in B$. Man erhält das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "1 \mapsto \mu_B"'] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \arrow[r, "\rho_X^B"] \arrow[dr, "\rho_Y^B"'] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) & R \arrow[l, "\mu_x \leftarrow\!\shortmid 1"'] \\ & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) & R \arrow[l, "\mu_y \leftarrow\!\shortmid 1"'] \end{tikzcd}$$

Dabei gilt: μ_x und μ_y haben die gleiche Orientierung, wenn die Gleichungen $\mu_x = \rho_x^B(\mu_B)$, $\mu_y = \rho_y^B(\mu_B)$ wahr sind.

Bemerkung Sei M kompakt. Die Orientierung von M ist $\mu_M \in H_n(M)$, so dass $\rho_x^M : H_n(M) \to H_n(M, M \setminus \{x\})$ und $\rho_x^M(\mu_M)$ ist eine Orientierung im Punkt x.